

**КАЗАНСКИЙ КООПЕРАТИВНЫЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
АВТОНОМНОЙ НЕКОММЕРЧЕСКОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ
ОРГАНИЗАЦИИ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ЦЕНТРОСОЮЗА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ КООПЕРАЦИИ»**

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Специальность: 10.05.01 Компьютерная безопасность

Специализация: «Разработка защищенного программного обеспечения»

Формы обучения: очная

Объем дисциплины:

в зачетных единицах: 6 з.е.

в академических часах: 216 ак.ч.

Форма промежуточной аттестации: экзамен

Оценочные материалы по дисциплине Математический анализ

обсуждены и рекомендованы к утверждению решением кафедры естественных дисциплин, сервиса и туризма от 25 марта 2025 г., протокол № 6

одобрены Научно-методическим советом Казанского кооперативного института (филиала) от 2 апреля 2025 г., протокол № 3

СОДЕРЖАНИЕ

1. Паспорт оценочных материалов
2. Оценочные материалы:
 - 2.1. Оценочные материалы для проведения текущего контроля.
 - 2.2. Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации.

Целью оценочных материалов по дисциплине (далее –ОМ) является комплексная оценка результатов обучения.

ОМ предназначены для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

ОМ включают оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

Оценочные материалы разработаны в соответствии с рабочей программой дисциплины Математический анализ.

1. Паспорт оценочных материалов по дисциплине «Математический анализ»

Формируемые компетенции (код и наименование компетенции)	Планируемые результаты обучения	Контролируемые разделы, темы дисциплины	Наименование оценочного средства	
			Текущий контроль	Промежуточная аттестация
1	3	4	5	6
<i>ОПК-3</i> Способен на основании совокупности математических методов разрабатывать, обосновывать и реализовывать процедуры решения задач профессиональной деятельности <i>ОПК-3.1</i> Применяет знания основных математических методов и их модификаций для обоснования процедур решения задач профессиональной деятельности	Знать основы математических методов и математической логики Уметь применять знания основных математических методов и их модификаций для обоснования процедур решения задач профессиональной деятельности Владеть методами теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности для постановки и решения задач разделов дискретной математики и математической логики	Тема 1. Введение в анализ Тема 2. Предел числовой последовательности Тема 3. Предел функции Тема 4. Непрерывные функции и их свойства Тема 5. Производные и дифференциалы Тема 6. Свойства дифференцируемых функций Тема 7. Исследование функций Тема 8. Неопределенный интеграл Тема 9. Определенный интеграл Тема 10. Несобственные интегралы Тема 11. Числовые ряды	<i>Тест 1-28</i>	<i>Вопрос на экзамене 1-76</i>

Формируемые компетенции (код и наименование компетенции)	Планируемые результаты обучения	Контролируемые разделы, темы дисциплины	Наименование оценочного средства	
			Текущий контроль	Промежуточная аттестация
1	3	4	5	6
ОПК-3.4 Демонстрирует умение обосновывать и реализовывать процедуры решения стандартных задач профессиональной деятельности с применением методов анализа данных	Знать основы дискретной математики и математической логики Уметь обосновывать и реализовывать процедуры решения стандартных задач профессиональной деятельности с применением методов анализа данных Владеть математическим аппаратом дискретной математики и математической логики, методами доказательства утверждений в этой области, навыками алгоритмизации основных задач	Тема 1. Введение в анализ Тема 2. Предел числовой последовательности Тема 3. Предел функции Тема 4. Непрерывные функции и их свойства Тема 5. Производные и дифференциалы Тема 6. Свойства дифференцируемых функций Тема 7. Исследование функций Тема 8. Неопределенный интеграл Тема 9. Определенный интеграл Тема 10. Несобственные интегралы Тема 11. Числовые ряды	Тест 1-28	Вопрос на экзамене 1-76

2. Оценочные материалы по дисциплине «Математический анализ»

2.1 Оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости

Образцы контрольных заданий по лабораторным занятиям

1. Будут ли шары $B_1[(0, 1), 1]$ и $B_2[(1, 5, 2), 1]$ пересекаться в пространстве R^2 с нормой $\|\cdot\|_\infty$? А если рассмотреть норму $\|\cdot\|_1$?

2. Для шара $B[(1, 1), 1]$ и точки $X = (3, 0)$ в пространстве R^2 найти шары $B_1[X, r_1]$ и $B_2[X, r_2]$ такие, что $B \cap B_1 = \emptyset$ и $B \subset B_2$.

3. Исследовать последовательность

$$X_m = \left\{ \frac{m+1}{2m+\sqrt{m}}, \ln\left(2+\frac{1}{m}\right), \sin\left(\frac{\pi m}{2}\right) \right\}$$

на покоординатную сходимость и на сходимость в пространстве R^3 .

4. Найти предел функции

$$f(x, y) = \frac{\arctg\left(\frac{1}{x^2}\right) + \exp(1+y)}{(1+2x) + (1-3y)}$$

при $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$.

5. Найти предел функции

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

при $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$.

6. Существует ли предел функции

$$f(x, y) = \frac{x+y}{2x+3y}$$

при $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$?

7. Найти частные производные первого и второго порядков функции

$$u = f\left(\frac{x}{y}, 2z\right).$$

8. Найти частные производные первого порядка функции

$$z = f(u, v) + u \cdot v,$$

если $u = x + y^2$, $v = x \cdot y$.

9. Найти частные производные первого порядка функции $z(x, y)$, заданной неявно уравнением

$$F\left(x \cdot z, \frac{y}{z}\right) = 0.$$

10. Выписать формулы Тейлора для функции $f(x, y) = \frac{\cos(x)}{\cos(y)}$ в точке $(0, 0)$ до членов второго порядка включительно.

11. Исследовать на экстремум функцию

$$z = xy(x + y + 3)$$

в точках $(0, 0)$, $(-1, -1)$, $(-3, 0)$, $(-1, 2)$.

12. Исследовать на экстремум функцию

$$z = \alpha x + \beta y - x^2 - y^2.$$

если $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

13. Исследовать на экстремум функцию

$$z = (2x^2 + y^2) \exp(-x^2 - y^2).$$

14. Исследовать на экстремум функцию

$$z = \frac{x}{2} + \frac{y}{3}$$

при условии $x^2 + y^2 = 1$.

15. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 - y^2 + 4x + 2y - 1$$

в области, ограниченной прямыми $x = -3$, $y = 2$, $-x + y = 1$.

16. Используя линии уровня, найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x + y + 3$$

в области, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x - y = 1$.

17. Используя линии уровня найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = \max\{(x + 2), (y + 2)\}$$

в области, заданной неравенством $x^2 + y^2 \leq 1$.

18. Для интеграла $\iint_D xy dx dy$, где $D = [0, 1] \times [0, 1]$, вычислить суммы Дарбу, разбивая D на четыре равные части.

19. Какой знак имеет интеграл $\iint_D \sqrt[3]{1 - x^2 - y^2} dx dy$, где $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$? Вывод проверить вычислением.

20. Для интеграла $\iint_D f(x, y) dx dy$, где $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq y\}$, выписать повторные интегралы.

21. Поменять порядок интегрирования в интеграле

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^y f(x, y) dx.$$

22. Поменять порядок интегрирования в интеграле

$$\int_1^4 dx \int_{(x-2)^2}^5 f(x, y) dx.$$

23. Перейти к полярным координатам в интеграле

$$\int_{-1}^0 dx \int_{-1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dx$$

24. Вычислить площадь области

$$D = \left\{ (x, y) : 2y \leq x^2 + y^2 \leq 6y, y \geq \frac{\sqrt{3}}{3}|x| \right\}$$

25. Доказать, что

$$\iint_D x^3 y^2 dx dy = 0,$$

где $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

26. Поменять порядок интегрирования в интеграле

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz.$$

27. Вычислить интеграл

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz,$$

где $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq z\}$.

28. Вычислить объем области

$$D = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq x^2 + y^2, y \geq 0, y \leq 2x, y \leq 6 - x\}.$$

29. Вычислить интеграл $\int_L y dl$,

где $L = \{(x, y) : x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi\}$.

30. Вычислить интеграл $\int_L (xy + 1) dx + (y^2 x + 2) dy$,

если:

а) L – отрезок прямой от точки $(-1, -1)$ до точки $(-2, 3)$;

б) L – часть кривой $x = \sqrt{y} + y^2$ от точки $(0, 0)$ до точки $(2, 1)$.

31. Вычислить интеграл $\int_{(1,-1)}^{(1,1)} (x - y)(dx - dy)$.

32. Найти функцию $z(x, y)$, если

$$dz = (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy.$$

33. Вычислить интеграл $\iint_S xy ds$,

где S – часть конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанного цилиндром $x^2 + y^2 = y$.

34. Вычислить интеграл $\iint_S (z + y) dx dz$,

где S - внешняя сторона тетраэдра, ограниченного плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

Образцы вопросов к коллоквиуму

1. Понятие m -мерного координатного пространства и m -мерного евклидова пространства. Множества в них.
2. Сходящиеся последовательности в E^m . Лемма о покоординатной сходимости.
3. Фундаментальная последовательность в E^m . Критерий Коши.
4. Ограниченная последовательность в E^m .
5. Теорема Больцано-Вейерштрасса.
6. Предельная точка множества. Лемма.
7. Понятие предела функции многих переменных (по Гейне, по Коши). Эквивалентность определений. Арифметические свойства пределов.
8. Повторные пределы. Примеры. Понятие. Теорема о связи между двойными и повторными пределами.
9. Определение функции многих переменных, непрерывной в точке. Примеры.
10. Теорема о непрерывности сложной функций многих переменных.
11. Теорема о сохранении знака непрерывной функции.
12. Теорема о прохождении непрерывной функции многих переменных через промежуточные значения.
13. 1-я теорема Вейерштрасса.
14. 2-я теорема Вейерштрасса.
15. Частные производные. Понятие, примеры. Геометрический смысл.
16. Понятие дифференцируемости функции многих переменных. Лемма об эквивалентности 2-х определений.
17. Связь между дифференцируемостью и существованием частных производных, между дифференцируемостью и непрерывностью.
18. Геометрический смысл дифференцируемости ф.м.п.
19. Достаточное условие дифференцируемости функции многих переменных в точке.
20. Теорема о дифференцируемости сложной ф.м.п.
21. Дифференциал ф.м.п. Определение, геометрический смысл.
22. Инвариантность формы дифференциала 1-го порядка.
23. Производная по направлению. Градиент.
24. Частные производные высших порядков. Понятие. Достаточное условие равенства смешанных производных.
25. Дифференциалы высших порядков ф.м.п. Неинвариантность их формы.
26. Формула Тейлора для ф.м.п.
27. Понятие экстремума ф.м.п. Необходимое условие локального экстремума.

28. Достаточное условие локального экстремума ф.м.п.
29. Теорема о дифференцируемости функции одной переменной, заданной неявно.
30. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
31. Система функций, заданных неявно. Вычисление их частных производных.
32. Зависимость функций. Понятие. Достаточное условие независимости.
33. Условный экстремум. Понятие, общий метод его поиска.
34. Метод множителей Лагранжа.

Тестовые задания для проведения промежуточной аттестации

ОПК-3 Способен на основании совокупности математических методов разрабатывать, обосновывать и реализовывать процедуры решения задач профессиональной деятельности

ОПК-3.1 Демонстрирует умение обосновывать и реализовывать процедуры решения стандартных задач профессиональной деятельности с применением основных математических методов

Знать	применение знаний основных математических методов и их модификаций для обоснования процедур решения задач профессиональной деятельности
Уметь	применять знания основных математических методов и их модификаций для обоснования процедур решения задач профессиональной деятельности

ОПК-3.4 Демонстрирует умение обосновывать и реализовывать процедуры решения стандартных задач профессиональной деятельности с применением методов анализа данных

Знать	обоснование и реализацию процедуры решения стандартных задач профессиональной деятельности с применением методов анализа данных
Уметь	обосновывать и реализовывать процедуры решения стандартных задач профессиональной деятельности с применением методов анализа данных

- 1. Задание комбинированного типа с выбором одного верного ответа из четырех предложенных и обоснованием выбора. Уровень сложности базовый. Время выполнения 3 мин.**

1. Область определения функции $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ представляет собой:

- A) Открытый круг радиуса 2
- B) Замкнутый круг радиуса 2
- C) Окружность радиуса 2
- D) Всю плоскость

Обоснование: Функция определена при $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, т.е. $x^2 + y^2 \leq 4$ - замкнутый круг радиуса 2

Ответ: B) Замкнутый круг радиуса 2

2. Частная производная $\partial z / \partial x$ функции $z = x^2y + \sin(xy)$ в точке (0,1) равна:

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) -1

Обоснование: $\partial z / \partial x = 2xy + y \cdot \cos(xy)$, в точке (0,1): $2 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot \cos(0) = 0 + 1 =$

1

Ответ: B) 1

3. Градиент функции $f(x,y) = x^2 + y^2$ в точке (1,1) равен:

- A) (1,1)
- B) (2,2)
- C) (0,0)
- D) (1,2)

Обоснование: $\text{grad } f = (\partial f / \partial x, \partial f / \partial y) = (2x, 2y)$, в точке (1,1): (2,2)

Ответ: B) (2,2)

4. Условие равномерной сходимости функционального ряда $\sum u_n(x)$ на множестве E:

- A) $\exists M_n: |u_n(x)| \leq M_n \forall x \in E$ и $\sum M_n$ сходится
- B) $\lim u_n(x) = 0 \forall x \in E$
- C) Частичные суммы ограничены
- D) Ряд сходится в каждой точке E

Обоснование: Это признак Вейерштрасса равномерной сходимости

Ответ: A) $\exists M_n: |u_n(x)| \leq M_n \forall x \in E$ и $\sum M_n$ сходится

5. Двойной интеграл $\iint dx dy$ по области $x^2 + y^2 \leq R^2$ равен:

- A) πR^2
- B) $2\pi R$
- C) $(4/3)\pi R^3$
- D) R^2

Обоснование: Это площадь круга радиуса R

Ответ: A) πR^2

6. При замене переменных в тройном интеграле элемент объема $dx dy dz$ в сферических координатах равен:

A) $\rho^2 \sin \varphi \, d\rho d\varphi d\theta$

B) $\rho \, d\rho d\varphi d\theta$

C) $\rho^2 \, d\rho d\varphi d\theta$

D) $\sin \varphi \, d\rho d\varphi d\theta$

Обоснование: В сферических координатах (ρ, φ, θ) : $x = \rho \sin \varphi \cos \theta$, $y = \rho \sin \varphi \sin \theta$, $z = \rho \cos \varphi$, якобиан $= \rho^2 \sin \varphi$

Ответ: A) $\rho^2 \sin \varphi \, d\rho d\varphi d\theta$

7. Точка $M(0,0)$ для функции $f(x,y) = x^2 + y^2$ является:

A) Точкой локального максимума

B) Точкой локального минимума

C) Седловой точкой

D) Точкой разрыва

Обоснование: $f(x,y) \geq 0$ и $f(0,0)=0$, значит это точка минимума

Ответ: B) Точкой локального минимума

8. Поверхностный интеграл первого рода не зависит от:

A) Выбора стороны поверхности

B) Выбора параметризации

C) Ориентации поверхности

D) Все ответы верны

Обоснование: Поверхностный интеграл первого рода (скалярный) не зависит от ориентации поверхности

Ответ: C) Ориентации поверхности

9. Радиус сходимости степенного ряда $\sum (x^n/n^2)$ равен:

A) 0

B) 1

C) 2

D) ∞

Обоснование: $R = \lim |a_n/a_{n+1}| = \lim |(1/n^2)/(1/(n+1)^2)| = \lim (n+1)^2/n^2 = 1$

Ответ: B) 1

10. Уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x,y)$ в точке (x_0, y_0, z_0) :

A) $z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

- B) $z = f'_x(x_0, y_0)x + f'_y(x_0, y_0)y$
 C) $(x - x_0)/f'_x = (y - y_0)/f'_y = (z - z_0)/(-1)$
 D) $f'_x(x - x_0) + f'_y(y - y_0) = 0$

Обоснование: Это стандартное уравнение касательной плоскости к графику функции

Ответ: A) $z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

2. Задание комбинированного типа с выбором нескольких вариантов ответа из предложенных и развернутым обоснованием выбора. Уровень сложности базовый. Время выполнения 3 мин.

11. Какие из утверждений о функции $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ при $(x, y) \neq (0, 0)$ и $f(0, 0) = 0$ ВЕРНЫ?

- 1) Функция непрерывна в точке $(0, 0)$
- 2) Существуют частные производные в точке $(0, 0)$
- 3) Функция дифференцируема в точке $(0, 0)$
- 4) Функция имеет предел в точке $(0, 0)$

Обоснование: Частные производные существуют: $f'_x(0, 0) = 0$, $f'_y(0, 0) = 0$. Но функция не имеет предела (разные значения при приближении по разным путям), значит не непрерывна и не дифференцируема

Ответ: Существуют частные производные в точке $(0, 0)$

12. Какие из условий являются достаточными для строгого локального минимума функции $f(x, y)$ в стационарной точке (x_0, y_0) ?

- 1) $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$
- 2) $f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0$
- 3) $f''_{yy}(x_0, y_0) > 0$
- 4) $\text{grad } f(x_0, y_0) = 0$

Обоснование: Достаточные условия: $\text{grad } f = 0$ (стационарность) и $f''_{xx} > 0$ и дискриминант > 0

Ответ: $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$; $f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0$; $\text{grad } f(x_0, y_0) = 0$

13. Какие из свойств выполняются для равномерно сходящихся функциональных рядов?

- 1) Предельная функция непрерывна
- 2) Возможно почленное интегрирование
- 3) Возможно почленное дифференцирование
- 4) Радиус сходимости равен бесконечности

Обоснование: Первые три свойства выполняются для равномерно сходящихся рядов

Ответ: Предельная функция непрерывна; Возможно почленное интегрирование; Возможно почленное дифференцирование

14. Какие из замен переменных используются при вычислении тройных интегралов?

- 1) Цилиндрические координаты
- 2) Сферические координаты
- 3) Полярные координаты
- 4) Аффинные преобразования

Обоснование: Все перечисленные замены используются

Ответ: Цилиндрические координаты; Сферические координаты; Полярные координаты; Аффинные преобразования

15. Какие из утверждений о поверхностных интегралах ВЕРНЫ?

- 1) Поверхностный интеграл первого рода не зависит от ориентации
- 2) Поверхностный интеграл второго рода зависит от ориентации
- 3) Формула Стокса связывает поверхностный и криволинейный интегралы
- 4) Формула Остроградского-Гаусса связывает поверхностный и объемный интегралы

Обоснование: Все утверждения верны

Ответ: Поверхностный интеграл первого рода не зависит от ориентации; Поверхностный интеграл второго рода зависит от ориентации; Формула Стокса связывает поверхностный и криволинейный интегралы; Формула Остроградского-Гаусса связывает поверхностный и объемный интегралы

3. Задание закрытого типа на установление соответствия. Уровень сложности повышенный. Время выполнения 5 мин.

16. Установите соответствие между методами и их назначением:

Метод	Назначение
1. Метод Рунге-Кутты	А. Решение краевых задач для ОДУ
2. Метод прогонки	В. Решение задачи Коши для ОДУ
3. Метод Ньютона	С. Решение нелинейных уравнений
4. Метод Гаусса	Д. Решение СЛАУ

Обоснование: Метод Рунге-Кутты для задачи Коши, метод прогонки для краевых задач, метод Ньютона для нелинейных уравнений, метод Гаусса для СЛАУ

Ответ: 1-В, 2-А, 3-С, 4-Д

17. Установите соответствие между понятиями и их определениями:

Понятие	Определение
1. Число обусловленности	A. Максимальное по модулю собственное значение
2. Спектральный радиус	B. Мера чувствительности решения к погрешностям
3. Порядок точности	C. Скорость убывания погрешности
4. Аппроксимация	D. Замена исходной задачи близкой

Обоснование: Число обусловленности - мера чувствительности, спектральный радиус - максимальное собственное значение, порядок точности - скорость убывания погрешности, аппроксимация - замена исходной задачи

Ответ: 1-B, 2-A, 3-C, 4-D

18. Установите соответствие между методами и их сходимостью:

Метод	Сходимость
1. Метод простой итерации (линейная)	A. $\rho(B) < 1$
2. Метод Ньютона	B. Квадратичная
3. Метод половинного деления	C. Линейная (1/2)
4. Степенной метод	D. Линейная

Обоснование: Метод простой итерации сходится при $\rho(B) < 1$, метод Ньютона квадратичный, метод половинного деления линейный с коэффициентом 1/2, степенной метод линейный

Ответ: 1-A, 2-B, 3-C, 4-D

19. Установите соответствие между квадратурными формулами и их степенью точности:

Формула	Степень точности
1. Прямоугольников	A. 1
2. Трапеций	B. 1
3. Симпсона	C. 3
4. Гаусса (2 узла)	D. 3

Обоснование: Формулы прямоугольников и трапеций имеют степень 1, Симпсона - 3, Гаусса с 2 узлами - 3

Ответ: 1-A, 2-B, 3-C, 4-D

20. Установите соответствие между разностными схемами и их свойствами:

Схема	Свойство
1. Явная схема	А. Условно устойчивая
2. Неявная схема	В. Безусловно устойчивая
3. Схема Кранка-Николсон	С. Второй порядок точности
4. Предиктор-корректор	Д. Повышенная точность

Обоснование: Явная схема условно устойчива, неявная безусловно устойчива, схема Кранка-Николсон имеет второй порядок, метод предиктор-корректор дает повышенную точность

Ответ: 1-А, 2-В, 3-С, 4-Д

4. Задание закрытого типа на установление последовательности.
Уровень сложности повышенный. Время выполнения 5 мин.

21. Расположите в правильном порядке шаги исследования функции двух переменных на экстремум:

- 1)Вычисление вторых частных производных
- 2)Решение системы уравнений для стационарных точек
- 3)Проверка достаточных условий экстремума
- 4)Вычисление первых частных производных

Правильная последовательность: Вычисление первых частных производных → Решение системы уравнений для стационарных точек → Вычисление вторых частных производных → Проверка достаточных условий экстремума

Ответ: 4, 2, 1, 3

22. Расположите в правильном порядке шаги вычисления двойного интеграла в полярных координатах:

- 1)Замена $dx dy$ на $r dr d\varphi$
- 2)Определение пределов изменения φ и r
- 3)Замена $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$
- 4)Вычисление повторного интеграла

Правильная последовательность: Замена $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ → Замена $dx dy$ на $r dr d\varphi$ → Определение пределов изменения φ и r → Вычисление повторного интеграла

Ответ: 3, 1, 2, 4

23. Расположите в правильном порядке шаги нахождения радиуса сходимости степенного ряда $\sum a_n x^n$:

- 1)Вычисление предела $\lim |a_n/a_{n+1}|$

- 2) Определение интервала сходимости
- 3) Исследование сходимости на концах интервала
- 4) Запись радиуса сходимости R

Правильная последовательность: Вычисление предела $\lim |a_n/a_{n+1}| \rightarrow$ Запись радиуса сходимости $R \rightarrow$ Определение интервала сходимости $\rightarrow$ Исследование сходимости на концах интервала

Ответ: 1, 4, 2, 3

24. Расположите в правильном порядке шаги вычисления потока векторного поля через поверхность:

- 1) Выбор параметризации поверхности
- 2) Вычисление векторного произведения параметризаций
- 3) Вычисление скалярного произведения $F \cdot n$
- 4) Вычисление поверхностного интеграла

Правильная последовательность: Выбор параметризации поверхности $\rightarrow$ Вычисление векторного произведения параметризаций $\rightarrow$ Вычисление скалярного произведения $F \cdot n \rightarrow$ Вычисление поверхностного интеграла

Ответ: 1, 2, 3, 4

25. Расположите в правильном порядке шаги метода множителей Лагранжа для условного экстремума:

- 1) Составление функции Лагранжа
- 2) Решение системы уравнений
- 3) Составление уравнений связи
- 4) Проверка достаточных условий

Правильная последовательность: Составление уравнений связи $\rightarrow$ Составление функции Лагранжа $\rightarrow$ Решение системы уравнений $\rightarrow$ Проверка достаточных условий

Ответ: 3, 1, 2, 4

5.Задание открытого типа с развернутым ответом.

Уровень сложности высокий. Время выполнения 10 мин.

26. Найдите все точки локального экстремума функции $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

Решение:

1. Находим частные производные:

$$f'_x = 3x^2 - 3y$$

$$f'_y = 3y^2 - 3x$$

2. Решаем систему для стационарных точек:

$$3x^2 - 3y = 0 \Rightarrow y = x^2$$

$$3y^2 - 3x = 0 \Rightarrow y^2 = x$$

3. Подставляем $y = x^2$ во второе уравнение:

$$(x^2)^2 = x \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 1$$

$$\text{Соответственно: } y_1 = 0, y_2 = 1$$

$$\text{Стационарные точки: } M_1(0,0), M_2(1,1)$$

4. Находим вторые производные:

$$f''_{xx} = 6x$$

$$f''_{xy} = -3$$

$$f''_{yy} = 6y$$

5. Исследуем точку $M_1(0,0)$:

$$A = f''_{xx}(0,0) = 0$$

$$B = f''_{xy}(0,0) = -3$$

$$C = f''_{yy}(0,0) = 0$$

$$\Delta = AC - B^2 = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0$$

Седловая точка

6. Исследуем точку $M_2(1,1)$:

$$A = f''_{xx}(1,1) = 6$$

$$B = f''_{xy}(1,1) = -3$$

$$C = f''_{yy}(1,1) = 6$$

$$\Delta = AC - B^2 = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 36 - 9 = 27 > 0$$

$$A > 0 \Rightarrow \text{локальный минимум}$$

$$f(1,1) = 1 + 1 - 3 = -1$$

Ответ: Локальный минимум в точке $(1,1)$, $f(1,1)=-1$; точка $(0,0)$ - седловая

27. Вычислите двойной интеграл $\iint (x^2 + y^2) dx dy$ по области $x^2 + y^2 \leq 4$

Решение:

Переходим к полярным координатам:

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, dx dy = r dr d\varphi$$

$$\text{Область: } 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\text{Подынтегральная функция: } x^2 + y^2 = r^2$$

Интеграл:

$$\iint (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^2 \cdot r dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 dr$$

Вычисляем внутренний интеграл:

$$\int_0^2 r^3 dr = [r^4/4]_0^2 = 16/4 = 4$$

Вычисляем внешний интеграл:

$$\int_0^{2\pi} 4d\varphi = 4 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} = 4 \cdot 2\pi = 8\pi$$

Ответ: 8π

28. Найдите поток векторного поля $F = (x, y, z)$ через внешнюю сторону сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

Решение:

Используем формулу Остроградского-Гаусса:

$$\oiint F \cdot ndS = \iiint \operatorname{div} F \, dxdydz$$

Находим дивергенцию:

$$\operatorname{div} F = \partial/\partial x(x) + \partial/\partial y(y) + \partial/\partial z(z) = 1 + 1 + 1 = 3$$

Интеграл по объему шара:

$$\iiint 3 \, dxdydz = 3 \cdot V, \text{ где } V - \text{объем шара радиуса } R$$

$$V = (4/3)\pi R^3$$

$$\text{Поток} = 3 \cdot (4/3)\pi R^3 = 4\pi R^3$$

Ответ: $4\pi R^3$

Критерии оценки для проведения экзамена по дисциплине (тестирование)

Шкала оценивания результатов промежуточной аттестации и критерии выставления оценок.

Оценка	Уровень сформированности компетенции	Критерии
«Отлично» («зачтено»)	<u>Высокий</u>	<u>Выполнено более 80% заданий предложенного теста</u>
«Хорошо» («зачтено»)	<u>Хороший</u>	<u>Выполнено 60-80% заданий предложенного теста</u>
«Удовлетворительно» («зачтено»)	<u>Достаточный</u>	<u>Выполнено 35-60% заданий предложенного теста</u>
«Неудовлетворительно» («не зачтено»)	<u>Недостаточный</u>	<u>Выполнено менее 35% заданий предложенного теста</u>

2.2 Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации

Вопросы к экзамену:

ОПК-3 Способен на основании совокупности математических методов разрабатывать, обосновывать и реализовывать процедуры решения задач профессиональной деятельности

ИОПК-3.1 Применяет знания основных математических методов и их модификаций для обоснования процедур решения задач профессиональной деятельности

ИОПК-3.4 Демонстрирует умение обосновывать и реализовывать процедуры решения стандартных задач профессиональной деятельности с применением методов анализа данных

Вопросы для подготовки к экзамену 1 семестр

1. Понятие евклидовой плоскости и евклидова пространства. Некоторые множества в E^2 и E^3 .
2. Понятие функции 2-х и 3-х переменных. Линии и поверхности уровня. Примеры.
3. Понятие m -мерного координатного пространства и m -мерного евклидова пространства. Множества в них.
4. Сходящиеся последовательности в E^m . Лемма о покоординатной сходимости.
5. Фундаментальная последовательность в E^m . Критерий Коши.
6. Ограниченная последовательность в E^m .
7. Теорема Больцано-Вейерштрасса.
8. Предельная точка множества. Лемма.
9. Понятие предела функции многих переменных (по Гейне, по Коши). Эквивалентность определений. Арифметические свойства пределов.
10. Повторные пределы. Примеры. Понятие. Теорема о связи между двойными и повторными пределами.
11. Определение функции многих переменных, непрерывной в точке. Примеры.
12. Теорема о непрерывности сложной функций многих переменных.
13. Теорема о сохранении знака непрерывной функции.
14. Теорема о прохождении непрерывной функции многих переменных через промежуточные значения.
15. I-я теорема Вейерштрасса.
16. 2-я теорема Вейерштрасса.
17. Частные производные. Понятие, примеры. Геометрический смысл.
18. Понятие дифференцируемости функции многих переменных. Лемма об эквивалентности 2-х определений.
19. Связь между дифференцируемостью и существованием частных производных, между дифференцируемостью и непрерывностью.
20. Геометрический смысл дифференцируемости ф.м.п.

21. Достаточное условие дифференцируемости функции многих переменных в точке.
22. Теорема о дифференцируемости сложной ф.м.п.
23. Дифференциал ф.м.п. Определение, геометрический смысл.
24. Инвариантность формы дифференциала 1-го порядка.
25. Производная по направлению. Градиент.
26. Частные производные высших порядков. Понятие. Достаточное условие равенства смешанных производных.
27. Дифференциалы высших порядков ф.м.п. Неинвариантность их формы.
28. Формула Тейлора для ф.м.п.
29. Понятие экстремума ф.м.п. Необходимое условие локального экстремума.
30. Достаточное условие локального экстремума ф.м.п.
31. Теорема о дифференцируемости функции одной переменной, заданной неявно.
32. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
33. Система функций, заданных неявно. Вычисление их частных производных.
34. Зависимость функций. Понятие. Достаточное условие независимости.
35. Условный экстремум. Понятие, общий метод его поиска.
36. Метод множителей Лагранжа.
37. Функциональная последовательность. Понятие, примеры. Поточечная и равномерная сходимости функциональной последовательности.
38. Непрерывность предела равномерно сходящейся функциональной последовательности.
39. Функциональный ряд и его сходимость.
40. Равномерная сходимость функционального ряда. Признак Вейерштрасса.

41. Теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося функционального ряда. Следствие.
42. Теорема о почленном интегрировании функциональных рядов.
43. Теорема о почленном дифференцировании функциональных рядов.
44. Теорема Абеля, следствие.
45. Радиус сходимости степенного ряда, его вычисление.
46. Свойства степенных рядов.
47. Ряд Тейлора. Понятие. Критерий сходимости. Достаточное условие сходимости на промежутке. Необходимое условие сходимости.
48. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора.
49. Приложения рядов Тейлора.
50. Задача определения объёма цилиндрического бруса. Определение двойного интеграла.
51. Суммы Дарбу для двойного интеграла, их свойства. Условие существования двойного интеграла.
52. Основные свойства двойных интегралов.
53. Приведение двойного интеграла к повторному для случая прямоугольной области.
54. Приведение двойного интеграла к повторному для случая криволинейной области.
55. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.
56. Замена переменных в двойном интеграле.
57. Приложения двойного интеграла.
58. Задача нахождения массы тела. Определение тройного интеграла.
59. Свойства тройного интеграла.
60. Сведение тройного интеграла к повторному для случая прямоугольного параллелепипеда.
61. Вычисление тройного интеграла по произвольному объёму.
62. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах.
63. Вычисление тройного интеграла в сферических координатах.
64. Приложения тройного интеграла.
65. Криволинейный интеграл 1-го рода.
66. Сведение криволинейного интеграла 1-го рода к определенному интегралу.
67. Криволинейный интеграл 2-го рода.
68. Существование и вычисление криволинейного интеграла 2-го рода.
69. Формула Грина. Вычисление площадей при помощи криволинейного интеграла 2-го рода.
70. Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.
71. Признак полного дифференциала и нахождение первообразной для случая прямоугольной области.
72. Поверхностный интеграл первого рода. Понятие.
73. Вычисление поверхностного интеграла 1-го рода. Расчетная формула.
74. Вычисление площадей поверхностей.

75. Сторона поверхности. Ориентация поверхности и пространства.
 76. Поверхностный интеграл второго рода

Критерии оценки для проведения экзамена по дисциплине (ответы на вопросы)

Шкала оценивания результатов промежуточной аттестации и критерии выставления оценок.

Оценка	Уровень сформированности компетенции	Критерии
«Отлично» («зачтено»)	Высокий	Обучающийся глубоко и прочно усвоил весь программный материал, исчерпывающе, последовательно, грамотно и логически стройно его излагает, тесно увязывает теорию с практикой. Обучающийся не затрудняется с ответом при видоизменении задания, свободно справляется с практическими заданиями, показывает знания нормативного материала, правильно обосновывает принятые решения, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических заданий, демонстрирует умение самостоятельно обобщать и излагать материал, не допуская ошибок
«Хорошо» («зачтено»)	Хороший	Обучающийся твердо знает программный материал, грамотно и по существу излагает его, допускает несущественные неточности в ответе на вопросы, может правильно применять теоретические положения и владеет необходимыми навыками при выполнении практических заданий.
«Удовлетворительно» («зачтено»)	Достаточный	Обучающийся усвоил только основной материал, но не знает отдельных деталей, допускает неточности и ошибки в ответе на вопросы, нарушает последовательность в изложении программного материала и испытывает затруднения при выполнении практических заданий.
«Неудовлетворительно» («не зачтено»)	Недостаточный	Обучающийся не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, с большими затруднениями выполняет практические задания или выполняет неправильно.

Обновление оценочных материалов

обсуждены и рекомендованы к утверждению решением кафедры наименование
кафедры от «___» _____ 20__ г., протокол № ____.

одобрены Научно-методическим советом _____ университета (института
(филиала) от «___» _____ 20__ г., протокол № ____.